

Introduction

Les Français souffrent d'une incomplète maîtrise des principaux concepts mathématiques utilisés dans la vie quotidienne. Selon l'étude réalisée par le CREDOC en 2011¹, à la question « Imaginons que vous placiez 100€ sur un compte rémunéré à 2%² par an. Vous ne faites plus aucun versement sur ce compte et vous ne retirez pas non plus d'argent. Combien aurez-vous sur votre compte un an plus tard, une fois les intérêts versés ? » seuls 51% des répondants avaient donné spontanément la bonne réponse. Les enquêtes annuelles réalisées par le cabinet Audirep pour la Banque de France³ depuis 2018, donne un taux de bonne réponse spontanée de 62% (2020) à la question proche suivante : « Supposons que vous déposiez 100€ sur un compte d'épargne sans frais offrant un taux d'intérêt garanti de 2% par an. Combien y aura-t-il dessus à la fin de la première année, une fois les intérêts crédités ? ». Cependant, ils ne sont plus que 46% à choisir la bonne réponse parmi cinq choix à la question : « Quelle somme y aurait-il sur le compte au bout de 5 ans ? ».

Pourtant, même si nous n'en avons pas conscience, ces concepts mathématiques font partie de notre quotidien. Quel investisseur privé

1 Crédoc, enquête « La culture financière des Français » 2011, disponible à l'adresse suivante : https://www.cnle.gouv.fr/IMG/pdf/CREDOC_la_culture_financiere_des_francais.pdf.

2 2% est équivalent à $\frac{2}{100}$ soit 0,02.

3 Audirep, enquête « l'éducation financière du public en France » 2018, 2019 et 2020. Un résumé de l'enquête est disponible à l'adresse : https://www.banque-france.fr/sites/default/files/audirep_banque_de_france_resultats_educfi_v3.pdf.

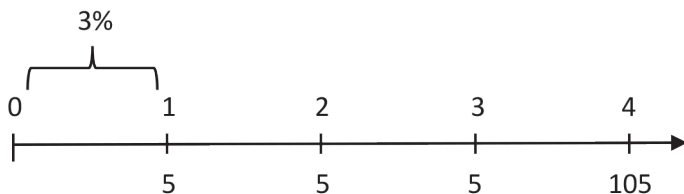
ne s'est pas posé la question du rendement de son investissement ou du montant qu'il aura à disposition à l'échéance du placement. Lors d'un achat immobilier, les emprunteurs s'adressent aux établissements bancaires pour connaître leur capacité d'endettement en fonction de leur capacité de remboursement.

Concernant les produits bancaires, les principales notions mobilisées sont celles d'intérêts simples, d'intérêts composés, de capitalisation et d'actualisation. Tous les jours, le chargé de comptes les utilise *via* le logiciel interne propre à chaque établissement. Un client est à découvert ; le logiciel va calculer des agios bancaires : intérêts simples au *pro rata temporis*. Une ouverture d'un compte à terme assortie d'une simulation ; intérêts simples ou composés (selon le contrat) et taux actuariel. La réalisation d'une offre de prêt immobilier et d'assurance ; actualisation, taux actuariel et taux équivalent. Une simulation du montant disponible pour le client à échéance sur un produit de placement ; capitalisation. L'estimation du montant de retraits programmés sur un contrat d'assurance-vie ; actualisation.

Les mathématiques financières sont également utiles en finance de marché et d'entreprise. Le vocabulaire change mais pas les concepts. Ainsi, sur les marchés financiers, le coupon versé pour une obligation revient à calculer des intérêts simples *pro rata temporis*. Le prix pied de coupon d'une obligation est le calcul de la valeur actualisée des flux financiers futurs diminuée des intérêts courus non échus (coupon couru). En finance d'entreprise, les décisions d'investissement sont, en partie, basées sur des calculs financiers tels que le calcul du taux de rendement interne de l'investissement (taux actuariel) ou encore celui de la valeur actuelle nette de l'investissement (actualisation).

Souvent, les étudiants éprouvent des difficultés à passer d'un univers à l'autre car ils ont appris des formules mathématiques pour chaque problématique sans visualiser les liens entre ces calculs. La visualisation passe souvent par la représentation des flux financiers rattachés au problème étudié (encaissements moins décaissements générés par le produit ou projet). Le graphique suivant présente des flux financiers sur 4 ans ; le premier flux d'un montant de 5 apparaît dans 1 an et le dernier de 105 dans 4 ans. L'unité de mesure des flux

n'est pas donnée. Cela peut-être des euros, des k€ ou encore des flux exprimés en base 100. Le taux annuel est de 3%.



L'objectif est de calculer la valeur aujourd'hui (en 0) de ces flux futurs, autrement dit d'actualiser. Ce calcul n'a *a priori* aucun intérêt. Pourtant, à partir de cet exercice, plusieurs histoires peuvent être racontées. En effet, cette valeur actuelle correspond :

- au montant que vous devez placer aujourd'hui sur un produit rémunéré à 3% l'an si vous désirez retirer 5 pendant 3 ans et avoir à la dernière période un solde de 105 ;
- au montant que vous pouvez emprunter aujourd'hui à 3% l'an si chaque année vos remboursements sont ceux du diagramme ;
- au prix sur le marché secondaire d'une obligation *in fine* servant chaque année un coupon (intérêt) de 5 et remboursée au pair (à la valeur nominale de 100) dans 4 ans (le dernier flux étant composé du nominal et du coupon de la période)⁴.

Quels sont les enseignements de cet exemple ? Il est important de donner du sens au calcul que nous faisons, autrement dit de comprendre l'objectif visé. Cependant, il faut avoir conscience que derrière des objectifs différents se cache souvent la même problématique mathématique. La représentation du diagramme des flux financiers générés par le produit permet de le visualiser. C'est l'optique qui sera retenue dans ce livre.

Résoudre les problèmes de mathématiques financières « à la main » revient à résoudre des équations. Si cela présente un intérêt académique dans certaines filières, ce n'est pas l'objectif poursuivi. Les étudiants se préparant aux métiers de la banque de détail et les per-

⁴ Cet exemple est traité dans le chapitre 4, exemple 5, p. 84.

sonnes déjà en poste doivent comprendre les calculs réalisés par leur outil interne afin de mieux orienter leur clientèle. Cela ne nécessite pas de savoir résoudre une équation. Aussi, tous les exemples seront résolus avec une calculatrice financière. Parmi les nombreuses possibilités, le choix s'est porté sur la calculatrice financière CASIO⁵ (appelée, par la suite, la financière). En effet, de nombreux étudiants ont acquis durant leurs études une CASIO scientifique programmable qui comporte (comme la plupart des scientifiques programmables) une option finance⁶ fonctionnant avec la même logique que la financière. L'objectif n'est pas de faire un manuel d'utilisation (il en existe un officiel en ligne) mais de donner les commandes permettant de trouver la solution chiffrée des exemples⁷.

Les notions de mathématiques financières seront abordées dans les 4 premiers chapitres illustrés par des exemples portant essentiellement sur des produits bancaires. Les 2 premiers chapitres portent sur la notions d'intérêts simples (chapitre 1) et composés (chapitre 2). Ils permettent de mettre en lumière que le taux nominal d'un produit ne donne pas une information suffisante sur le produit. La maîtrise des intérêts composés est la base pour appréhender les notions de capitalisation (chapitre 3) et d'actualisation (chapitre 4). Du point de vue des concepts mathématiques, le propos aurait pu s'arrêter là. Néanmoins, aucun livre s'adressant à des (futurs) chargés de comptes ne peut faire l'impasse sur un produit essentiel de la conquête bancaire : le crédit bancaire (chapitre 5).

5 CASIO FC-100V ou modèle plus ancien.

6 TVM dans le menu.

7 Tous les exemples ne sont pas résolus avec la financière. Cependant, les corrections réalisées permettent de donner les méthodes nécessaires à la résolution de l'ensemble des exemples.